



教辅图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

经浙江省中小学教辅材料  
评议委员会评议通过

# 全品 高考复习方案

主编 谢业建

主编：肖德好

浙江省

听课手册  
数学

A

长江出版传媒  
崇文书局

# CONTENTS

## 目录

### 01 第一单元 预备知识

|       |            |     |
|-------|------------|-----|
| 第 1 讲 | 集合         | 002 |
| 第 2 讲 | 常用逻辑用语     | 005 |
| 第 3 讲 | 等式性质与不等式性质 | 008 |
| 第 4 讲 | 基本不等式      | 010 |
| 第 5 讲 | 一元二次方程、不等式 | 013 |

### 02 第二单元 函数

|        |                |     |
|--------|----------------|-----|
| 第 6 讲  | 函数的概念及其表示      | 018 |
| 第 7 讲  | 函数的单调性、值域与最值   | 022 |
| 第 8 讲  | 函数的奇偶性、周期性、对称性 | 025 |
| 微专题 1  | 抽象函数的性质及其应用    | 029 |
| 第 9 讲  | 二次函数与幂函数       | 031 |
| 第 10 讲 | 指数与指数函数        | 035 |
| 第 11 讲 | 对数与对数函数        | 038 |
| 微专题 2  | 指、对、幂的大小比较     | 042 |
| 第 12 讲 | 函数的图象          | 043 |
| 第 13 讲 | 函数的零点与方程的解     | 048 |
| 第 14 讲 | 函数模型及其应用       | 052 |

### 03 第三单元 导数及其应用

|        |                   |     |
|--------|-------------------|-----|
| 第 15 讲 | 导数的概念及其意义、导数的运算   | 056 |
| 第 16 讲 | 导数与函数的单调性         | 060 |
| 第 17 讲 | 导数与函数的极值、最值       | 063 |
| 微专题 3  | 构造函数问题模型          | 067 |
| 第 18 讲 | 导数的综合问题           | 069 |
| 第 1 课时 | 利用导数求解不等式恒(能)成立问题 | 069 |
| 第 2 课时 | 利用导数研究函数零点        | 072 |
| 拓展 1   | 双变量问题的求解策略        | 075 |

### 04 第四单元 三角函数与解三角形

|        |                  |     |
|--------|------------------|-----|
| 第 19 讲 | 任意角和弧度制与三角函数的概念  | 078 |
| 第 20 讲 | 同角三角函数的基本关系与诱导公式 | 082 |

|              |                                              |     |
|--------------|----------------------------------------------|-----|
| 第 21 讲       | 两角和、差及倍角公式                                   | 086 |
| 第 22 讲       | 简单的三角恒等变换                                    | 088 |
| 第 23 讲       | 三角函数的图象与性质                                   | 091 |
| 第 24 讲       | 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 及三角函数的应用 | 095 |
| <b>微专题 4</b> | <b>三角函数中与 <math>\omega</math> 范围有关的问题</b>    | 100 |
| 第 25 讲       | 余弦定理、正弦定理                                    | 102 |
| <b>微专题 5</b> | <b>“爪形”三角形问题</b>                             | 107 |
| 第 26 讲       | 余弦定理、正弦定理应用举例                                | 108 |

## 05 第五单元 平面向量、复数

|              |                   |     |
|--------------|-------------------|-----|
| 第 27 讲       | 平面向量的概念及其线性运算     | 112 |
| 第 28 讲       | 平面向量基本定理及坐标表示     | 116 |
| 第 29 讲       | 平面向量的数量积与平面向量应用举例 | 119 |
| <b>微专题 6</b> | <b>平面向量中的综合问题</b> | 122 |
| 第 30 讲       | 复数                | 126 |

## 06 第六单元 数列

|              |                                       |     |
|--------------|---------------------------------------|-----|
| 第 31 讲       | 数列的概念与简单表示法                           | 129 |
| <b>微专题 7</b> | <b>由数列的递推关系求通项公式 <math>a_n</math></b> | 132 |
| 第 32 讲       | 等差数列                                  | 134 |
| 第 33 讲       | 等比数列                                  | 137 |
| 第 34 讲       | 数列求和                                  | 141 |
| <b>微专题 8</b> | <b>重构数列问题</b>                         | 144 |
| <b>微专题 9</b> | <b>数列的创新问题</b>                        | 145 |

## 07 第七单元 立体几何

|               |                   |     |
|---------------|-------------------|-----|
| 第 35 讲        | 空间几何体             | 147 |
| 第 1 课时        | 空间几何体             | 147 |
| 第 2 课时        | 与球有关的切接问题         | 152 |
| 第 36 讲        | 空间点、直线、平面之间的位置关系  | 154 |
| 第 37 讲        | 直线、平面平行的判定与性质     | 158 |
| 第 38 讲        | 直线、平面垂直的判定与性质     | 162 |
| 第 39 讲        | 空间向量及其运算和空间位置关系   | 166 |
| 第 40 讲        | 空间角               | 171 |
| 第 41 讲        | 空间距离及立体几何中的探索性问题  | 175 |
| <b>微专题 10</b> | <b>空间动态问题</b>     | 178 |
| <b>微专题 11</b> | <b>立体几何中的创新问题</b> | 180 |

## 08 第八单元 解析几何

|        |                            |     |
|--------|----------------------------|-----|
| 第 42 讲 | 直线的倾斜角与斜率、直线的方程 .....      | 182 |
| 第 43 讲 | 两直线的位置关系 .....             | 186 |
| 第 44 讲 | 圆的方程 .....                 | 189 |
| 第 45 讲 | 直线与圆、圆与圆的位置关系 .....        | 193 |
| 第 46 讲 | 椭圆 .....                   | 197 |
| 第 47 讲 | 双曲线 .....                  | 200 |
| 第 48 讲 | 抛物线 .....                  | 204 |
| 第 49 讲 | 直线与圆锥曲线的位置关系 .....         | 207 |
| ★ 拓展 2 | 与焦点有关的常用结论 .....           | 210 |
| 第 50 讲 | 圆锥曲线热点问题 .....             | 214 |
|        | 第 1 课时 求值、最值与范围、证明问题 ..... | 214 |
|        | 第 2 课时 定点、定值、定直线问题 .....   | 218 |
| 微专题 12 | 圆锥曲线中的创新问题 .....           | 221 |

## 09 第九单元 统计

|        |                    |     |
|--------|--------------------|-----|
| 第 51 讲 | 随机抽样 .....         | 223 |
| 第 52 讲 | 统计图表、用样本估计总体 ..... | 227 |
| 第 53 讲 | 成对数据的统计分析 .....    | 232 |

## 10 第十单元 排列、组合与二项式定理、概率

|        |                             |     |
|--------|-----------------------------|-----|
| 第 54 讲 | 两个计数原理 .....                | 239 |
| 第 55 讲 | 排列与组合 .....                 | 242 |
| 第 56 讲 | 二项式定理 .....                 | 245 |
| 第 57 讲 | 随机事件与概率、古典概型 .....          | 248 |
| 第 58 讲 | 随机事件的相互独立性与条件概率、全概率公式 ..... | 251 |
| 第 59 讲 | 离散型随机变量的分布列和数字特征 .....      | 256 |
| 第 60 讲 | 二项分布与超几何分布、正态分布 .....       | 260 |
| 微专题 13 | 概率的创新交汇问题 .....             | 265 |

|      |       |     |
|------|-------|-----|
| 参考答案 | ..... | 267 |
|------|-------|-----|

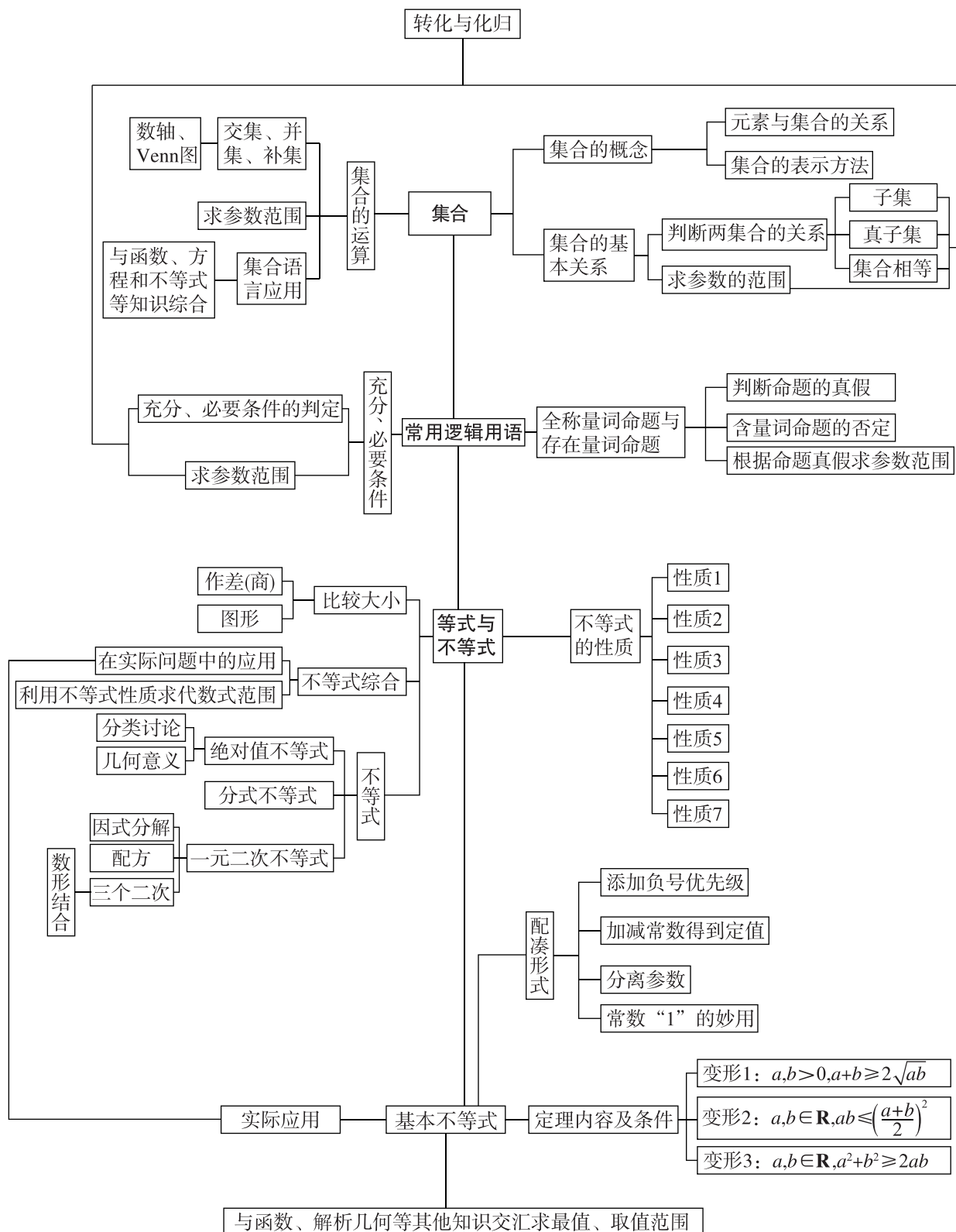




# 第一单元 预备知识

## 单元教学设计

### 知识网络



第1讲 集合

- 【课标要求】
- 1. 通过实例,了解集合的含义,理解元素与集合的属于关系.
  - 2. 针对具体问题,能在自然语言和图形语言的基础上,用符号语言刻画集合.
  - 3. 在具体情境中,了解全集与空集的含义.
  - 4. 理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.
  - 5. 理解两个集合的并集与交集的含义,能求两个集合的并集与交集.
  - 6. 理解在给定集合中一个子集的补集的含义,能求给定子集的补集.
  - 7. 能使用 Venn 图表达集合的基本关系与基本运算,体会图形对理解抽象概念的作用.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 集合的有关概念

- (1) 集合元素的三个特性: \_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_.
- (2) 集合的三种表示方法: \_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_.
- (3) 元素与集合的两种关系:属于,记为 \_\_\_\_\_;不属于,记为 \_\_\_\_\_.
- (4) 六个特定的集合及其关系图:  $\mathbf{N}^*$  或  $\mathbf{N}_+$  表示 ,  $\mathbf{N}$  表示非负整数集(或自然数集),  $\mathbf{Z}$  表示 \_\_\_\_\_,  $\mathbf{Q}$  表示 \_\_\_\_\_,  $\mathbf{R}$  表示实数集,  $\mathbf{C}$  表示 \_\_\_\_\_.

2. 集合间的基本关系

- (1) 包含:一般地,对于两个集合  $A, B$ ,如果集合  $A$  中任意一个元素都是集合  $B$  中的元素,就称集合  $A$  为集合  $B$  的子集,记作 \_\_\_\_\_(或  $B \supseteq A$ ).
- (2) 真包含:如果集合  $A \subseteq B$ ,但存在元素  $x \in B$ ,且  $x \notin A$ ,就称集合  $A$  是集合  $B$  的真子集,记作  $A \subset B$ (或  $B \supset A$ ).
- (3) 相等:只要构成两个集合的元素是一样的,我们就称这两个集合是 \_\_\_\_\_的.
- (4) 空集是任何集合的子集,是 \_\_\_\_\_集合的真子集.

3. 集合的基本运算

|    | 文字语言                             | 符号语言                                       | 图形语言                                                                                  | 记法    |
|----|----------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 交集 | 属于 $A$ _____ 属于 $B$ 的元素组成的集合     | $\{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\}$    |   | _____ |
| 并集 | 属于 $A$ _____ 属于 $B$ 的元素组成的集合     | $\{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\}$    |  | _____ |
| 补集 | 全集 $U$ 中 _____ 属于 $A$ 的所有元素组成的集合 | $\{x \mid x \in U, \text{且 } x \notin A\}$ |  | _____ |

4. 集合的运算性质

- (1) 交集的运算性质: $A \cap B = B \cap A; A \cap A = A; A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing; A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ .
- (2) 并集的运算性质: $A \cup B = \text{_____}; A \cup A = A; A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A; A \cup B = \text{_____} \Leftrightarrow B \subseteq A$ .

(3)补集的运算性质: $A \cup (\complement_U A) = U$ ;  $A \cap (\complement_U A) = \_\_\_\_\_\_$ ;  $\complement_U(\complement_U A) = \_\_\_\_\_\_$ ;  $\complement_U(A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ ;  $\complement_U(A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ .

◆◆ 常用结论

(1)集合的关系

①一个集合的真子集必是其子集,一个集合的子集不一定是其真子集.

②任何一个集合是它本身的子集,空集是任何集合的子集.

③子集的传递性:若  $A \subseteq B, B \subseteq C$ , 则  $A \subseteq C$  (真子集也满足).

④若  $A \subseteq B$  且  $B \neq \emptyset$ , 则有  $A = \emptyset$  和  $A \neq \emptyset$  两种可能.

(2)集合的子集个数和元素个数

①集合子集的个数:若有限集  $A$  中有  $n$  个元素, 则  $A$  的子集有  $2^n$  个, 真子集有  $(2^n - 1)$  个, 非空子集有  $(2^n - 1)$  个, 非空真子集有  $(2^n - 2)$  个.

②集合元素的个数:  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ ,  $\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$  (常用在实际问题中).

(3)集合的运算

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \complement_U A \supseteq \complement_U B$ .

题组一 易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若  $1 \in \{x^2, x\}$ , 则  $x = -1$  或  $x = 1$ . ( )

(2)集合  $A = \{y | y = x^2, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = x + 2, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $A \cap B = \{(-1, 1), (2, 4)\}$ . ( )

(3)已知集合  $A = \{x | y = \frac{1}{x}\}$ ,  $B = \{y | y = \frac{1}{x-1}\}$ , 则  $A \neq B$ . ( )

题组二 教材改编

1. 设集合  $A = \{x | x \geq -1\}$ , 则下列四个关系中正确的是 ( )

- A.  $1 \in A$  B.  $1 \notin A$   
C.  $\{1\} \in A$  D.  $1 \subseteq A$

2. 已知全集  $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , 集合  $A = \{x \in \mathbf{Z} | |x| < 2\}$ , 则  $\complement_U A =$  ( )

- A.  $\{-1, 0, 1\}$  B.  $\{-2, 2, 3\}$   
C.  $\{-2, -1, 2\}$  D.  $\{-2, 0, 3\}$

3. 已知集合  $A = \{x | 0 \leq x < 7, x \in \mathbf{N}\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则集合  $A, B$  间的关系为 ( )

- A.  $A \in B$  B.  $B \in A$   
C.  $A = B$  D.  $B \subsetneq A$

课堂考点探究

探究点一 集合的概念及表示

例1 (1)设集合  $A = \{x | 2x - 1 > m\}$ . 若  $2 \in A$ , 则  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $m \leq 3$  B.  $m \geq 3$  C.  $m < 3$  D.  $m > 3$

(2)(多选题)下列表示同一集合的是 ( )

- A.  $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{N} \text{ 且 } 0 < n < 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$   
B.  $A = \{x | x > 1\}$ ,  $B = \{y | y > 1\}$   
C.  $A = \{x | y = x + 1\}$ ,  $B = \{(x, y) | y = x + 1\}$   
D.  $A = \{x | x > 0, x \in \mathbf{N}\}$ ,  $B = \{x | x > 0, x \in \mathbf{Z}\}$

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

(1)用描述法表示集合时,要确定构成集合的元素是什么及这些元素的限制条件是什么.

(2)注意对集合中的元素是否满足互异性进行检验.

(3)遇到含参问题的选择题,可以从选项入手,利用排除法,可把逆向思维问题转化为正向思维问题进行求解.

【对点演练 1】(1) 已知集合  $A = \{x \mid 3ax - 2 \leq 0\}$ , 若  $1 \in A$  且  $2 \notin A$ , 则 ( )

- A.  $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$       B.  $a < 0$   
C.  $\frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{3}$       D.  $a > \frac{2}{3}$

(2) [2026 · 河北衡水联考] 设集合  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{2a, 2a^2\}$ , 若  $A = B$ , 则  $ab =$  \_\_\_\_\_.

[听课笔记]

## 探究点二 集合间的基本关系

例 2 (1) 若集合  $A = \{x \mid x^2 - 5x \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid x > 5\}$ , 则 ( )

- A.  $A \subseteq B$       B.  $B \subseteq A$   
C.  $A \cup B = \mathbf{R}$       D.  $A \subseteq \complement_{\mathbf{R}} B$

(2) [2026 · 山东青岛模拟] 若集合  $A = \left\{x \mid x = \frac{k}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ,  $B = \left\{y \mid y = \frac{k}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ , 则 ( )

- A.  $A \subseteq B$       B.  $B \subseteq A$   
C.  $A = B$       D.  $A \cap B = \emptyset$

(3) 已知集合  $A = \{x \mid x(x+m) \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid (3x+1)(x-m+1) = 0\}$ ,  $C = A \cap B$ , 若集合  $C$  有 3 个真子集, 则实数  $m$  的值可能为 ( )

- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$   
C.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{3}{2}$

[听课笔记]

## ◆◆ 总结反思

判断集合间的基本关系的常用方法

定义法: 根据题中限定条件把集合元素表示出来, 然后比较集合元素的异同, 从而找出集合间的关系.

图示法: (1) 在同一个数轴上表示出两个集合, 比较端点之间的大小关系, 从而确定集合间的关系; (2) 借助 Venn 图来表示集合间的包含关系.

【对点演练 2】(1) [2026 · 湘豫名校联考] 已知集合  $A = \{0, 1, 2, 4\}$ ,  $B = \{0, 2, 3\}$ , 则 ( )

- A.  $A \subseteq B$   
B.  $B \subseteq A$   
C.  $A \cup B = \{0, 1, 2, 4\}$   
D.  $A \cap B = \{0, 2\}$

(2) 设集合  $A = \{1, \ln a\}$ ,  $B = \{0, a\}$ , 若  $A = B$ , 则  $a =$  ( )

- A.  $-1$       B.  $0$   
C.  $1$       D.  $e$

(3) 已知集合  $A = \{-2, 0, 1\}$ ,  $B = \{x \mid 4 - ax > 0\}$ , 若  $A \subseteq B$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-2, +\infty)$       B.  $(-\infty, 4)$   
C.  $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$       D.  $(-2, 4)$

[听课笔记]

## 探究点三 集合的基本运算

### 题型 1 集合的运算

例 3 (1) [2025 · 全国二卷] 已知集合  $A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}$ ,  $B = \{x \mid x^3 = x\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{0, 1, 2\}$       B.  $\{1, 2, 8\}$   
C.  $\{2, 8\}$       D.  $\{0, 1\}$

(2) [2025 · 全国一卷] 已知集合  $U = \{x \mid x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$ ,  $A = \{1, 3, 5\}$ , 则  $\complement_U A$  中元素个数为 ( )

- A. 2      B. 3  
C. 5      D. 8

(3) [2024 · 北京卷] 已知集合  $M = \{x \mid -3 < x < 1\}$ ,  $N = \{x \mid -1 \leq x < 4\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )

- A.  $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$       B.  $\{x \mid x > -3\}$   
C.  $\{x \mid -3 < x < 4\}$       D.  $\{x \mid x < 4\}$

[听课笔记]

题型2 利用集合的运算求参数的值(范围)

例4 (1)已知集合  $A=\{x|x>a\}$ ,  $B=\{x|x^2-4x+3<0\}$ . 若  $A\cup B=A$ , 则  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, 1]$                       B.  $(-\infty, 3]$   
C.  $[1, +\infty)$                       D.  $[3, +\infty)$

(2)[2025·陕西安康模拟] 已知集合  $A=\{x|\frac{x-1}{x^3}\leq 0\}$ ,  $B=\{x|x\geq a\}$ , 若  $A\cap B=A$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $[0, +\infty)$                       B.  $(0, +\infty)$   
C.  $(-\infty, 0]$                       D.  $(-\infty, 0)$

[听课笔记]

◆◆ 总结反思

1. 对于已知集合的运算, 可根据集合的交集、并集和补

集的定义直接求解, 也可结合数轴以及 Venn 图求解.  
2. 根据集合运算求参数, 要把集合语言先转换为方程或不等式, 然后解方程或不等式, 再利用数形结合求解. 解题过程中要注意的几点: (1)端点值能否取到; (2)讨论二次项系数等是否为零; (3)使用根与系数的关系的前提应满足  $\Delta\geq 0$ .

【对点演练3】(1)[2024·新课标I卷] 已知集合  $A=\{x|-5<x^3<5\}$ ,  $B=\{-3, -1, 0, 2, 3\}$ , 则  $A\cap B=$  ( )

- A.  $\{-1, 0\}$                       B.  $\{2, 3\}$   
C.  $\{-3, -1, 0\}$                       D.  $\{-1, 0, 2\}$

(2)已知集合  $M=\{-1, 0, a-1\}$ ,  $N=\{a+1, -2\}$ , 若  $M\cap N=N$ , 则  $a=$  ( )

- A.  $-1$     B.  $0$     C.  $1$     D.  $2$

[听课笔记]

第2讲 常用逻辑用语

- 【课标要求】 1. 通过对典型数学命题的梳理, 理解必要条件、充分条件、充要条件的意义, 理解性质定理与必要条件的关系、判定定理与充分条件的关系、数学定义与充要条件的关系.  
2. 通过已知的数学实例, 理解全称量词与存在量词的意义.  
3. 能正确使用存在量词对全称量词命题进行否定, 能正确使用全称量词对存在量词命题进行否定.

课前基础巩固

知识聚焦

1. 充分条件、必要条件与充要条件的概念

若  $p\Rightarrow q$ , 则  $p$  是  $q$  的 \_\_\_\_\_ 条件,  $q$  是  $p$  的 \_\_\_\_\_ 条件

|                      |                                       |
|----------------------|---------------------------------------|
| $p$ 是 $q$ 的 _____ 条件 | $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$  |
| $p$ 是 $q$ 的 _____ 条件 | $p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$  |
| $p$ 是 $q$ 的 _____ 条件 | $p\Leftrightarrow q$                  |
| $p$ 是 $q$ 的 _____ 条件 | $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$ |

2. 全称量词与存在量词

- (1)短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫作 \_\_\_\_\_, 并用符号“\_\_\_\_\_”表示.  
(2)短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫作 \_\_\_\_\_, 并用符号“\_\_\_\_\_”表示.

(3)含有一个量词的命题的否定:  
全称量词命题:  $\forall x\in M, p(x)$ , 它的否定: \_\_\_\_\_.  
存在量词命题:  $\exists x\in M, p(x)$ , 它的否定: \_\_\_\_\_.

◆◆ 常用结论

1. 充分、必要条件的两个结论:  
(1)若  $p$  是  $q$  的充分不必要条件,  $q$  是  $r$  的充分不必要条件, 则  $p$  是  $r$  的充分不必要条件;  
(2)若  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 则  $\neg q$  是  $\neg p$  的充分不必要条件.  
2. 充分、必要条件与集合的关系

|                                               |                |
|-----------------------------------------------|----------------|
| 使 $p$ 成立的对象构成的集合为 $A$ , 使 $q$ 成立的对象构成的集合为 $B$ |                |
| $p$ 是 $q$ 的充分条件                               | $A\subseteq B$ |
| $p$ 是 $q$ 的必要条件                               | $B\subseteq A$ |

(续表)

|                    |                  |
|--------------------|------------------|
| $p$ 是 $q$ 的充分不必要条件 | $A \subsetneq B$ |
| $p$ 是 $q$ 的必要不充分条件 | $B \subsetneq A$ |
| $p$ 是 $q$ 的充要条件    | $A = B$          |

### 课前演练

#### 题组一 易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)命题“三角形的内角和是  $180^\circ$ ”是全称量词命题. ( )
- (2)“有些三角形中三个内角相等”是存在量词命题. ( )
- (3) $a=1$  是  $a^2=1$  的充要条件. ( )
- (4) $a>0, b>0$  成立的一个必要不充分条件是  $a+b>0$ . ( )

### 题组二 教材改编

1. 下列不能说明“ $\exists x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 - 2x = 1$ ”为真命题的条件是 ( )
- A.  $(x, y) = (0, 1)$
- B.  $(x, y) = (0, -1)$
- C.  $(x, y) = (2, 1)$
- D.  $(x, y) = (-2, 1)$
2. 下列命题中是假命题的是 ( )
- A.  $\exists x \in \mathbf{R}, \lg x = 1$
- B.  $\exists x \in \mathbf{R}, \sin x = 0$
- C.  $\forall x \in \mathbf{R}, x^3 > 0$
- D.  $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x > 0$
3. 对于实数  $x$ , “ $x < 0$ ”是“ $x < 1$ ”的 ( )
- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

### 课堂考点探究

#### 探究点一 充分条件与必要条件的判断

例 1 (1) 设  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $-2 \leq x \leq -1$ ”是“ $\frac{x+2}{x+1} \leq 0$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

(2) [2026 · 广东湛江期中] “ $a > b > c$ ”是“ $a + b > c$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

[听课笔记]

#### ◆◆ 总结反思

充分条件、必要条件的两种判定方法

(1) 定义法: 根据  $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$  进行判断, 适用于定义、定

理判断性问题.

(2) 集合法: 根据  $p, q$  对应的集合之间的包含关系进行判断, 多适用于条件中涉及参数范围的推断问题.

【对点演练 1】(1) 已知  $a > 0, b > 0$ , 则“ $a + b = 2$ ”是“ $ab \leq 1$ ”的 ( )

- A. 充要条件
- B. 充分不必要条件
- C. 必要不充分条件
- D. 既不充分也不必要条件

(2) [2026 · 河北保定质检] 已知集合  $A = \{x \mid x^2 < 1\}, B = \{x \mid 2a < x < 2a + 1\}$ , 若“ $t \in B$ ”是“ $t \in A$ ”的充分不必要条件, 则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

#### 探究点二 充分、必要条件的应用

例 2 (1) [2026 · 湖北武汉期末] 已知  $p: x < -3$  或  $x > 2, q: x > a$ , 且  $q$  是  $p$  的充分不必要条件, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $a \leq 2$
- B.  $a \leq -3$
- C.  $a > 2$
- D.  $a \geq 2$

(2) 已知  $A = \{x | x \leq m\}$ ,  $B = \{x | x \leq 3\}$ , 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 则  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $m > 3$  B.  $m \geq 3$  C.  $m < 3$  D.  $m \leq 3$

[听课笔记]

### ◆◆ 总结反思

应用充分条件、必要条件求解参数范围的方法:

(1) 把充分条件、必要条件或充要条件转化为集合之间的关系, 然后根据集合之间的关系列出关于参数的不等式(或不等式组)求解;

(2) 检验区间的端点值, 不等式是否能够取等号决定端点值的取舍, 处理不当容易出现漏解或增解的现象.

【对点演练 2】(1) [2025 · 江西赣州期末]

“ $m \in (2, +\infty)$ ”的充分不必要条件是 ( )

- A.  $m \geq 2$  B.  $m \geq 3$   
C.  $m > 2$  D.  $m \geq 1$

(2) 已知  $\alpha: x < 2m - 1$  或  $x > -m$ ,  $\beta: x < 2$  或  $x \geq 4$ , 若  $\alpha$  是  $\beta$  的必要条件, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

[听课笔记]

### 探究点三 全称量词与存在量词

#### 题型 1 含量词命题的否定

例 3 [2026 · 浙江杭州期末] 命题“ $\exists x > 0$ ,  $x^2 - 3x - 10 > 0$ ”的否定是 ( )

- A.  $\forall x > 0, x^2 - 3x - 10 > 0$   
B.  $\exists x > 0, x^2 - 3x - 10 \leq 0$   
C.  $\forall x \leq 0, x^2 - 3x - 10 \leq 0$   
D.  $\forall x > 0, x^2 - 3x - 10 \leq 0$

[听课笔记]

#### 题型 2 含量词命题的真假判定

例 4 [2026 · 陕西延安模拟] 已知命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, (x+1)^2 > 0$ , 命题  $q: \exists x > 0, x^3 = x^2$ , 则 ( )

- A.  $p$  和  $q$  都是真命题  
B.  $\neg p$  和  $q$  都是真命题  
C.  $p$  和  $\neg q$  都是真命题  
D.  $\neg p$  和  $\neg q$  都是真命题

[听课笔记]

#### 题型 3 由含量词命题的真假求参数的取值范围

例 5 (1) [2025 · 山东百师联盟联考] 若“ $\exists x \in [1, 4], 2x + a + 1 \leq 0$ ”是假命题, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -9)$  B.  $(-\infty, -3)$   
C.  $(-9, +\infty)$  D.  $(-3, +\infty)$

(2) [2026 · 江苏苏州期末] 若命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + m \geq 0$ ”是假命题, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, \frac{1}{4}]$  B.  $(-\infty, \frac{1}{4})$   
C.  $(\frac{1}{4}, +\infty)$  D.  $[\frac{1}{4}, +\infty)$

[听课笔记]

### ◆◆ 总结反思

1. 全称量词命题的否定是把“全称量词”改为“存在量词”, 然后对原命题的结论进行否定; 存在量词命题的否定是把“存在量词”改为“全称量词”, 然后对原命题的结论进行否定.

2. 全称量词命题与存在量词命题真假的判断方法: 对于全称量词命题, 所有对象都能使命题为真, 则这个全称量词命题为真命题; 对于存在量词命题, 只要有一个对象使命题为真, 则这个存在量词命题为真命题.

3. 由含量词命题的真假求参数的取值范围的方法: 先把含有量词的命题转化为真命题, 再转化为解不等式的恒成立问题或有解问题, 通过求最值, 即可得参数的取值范围.



【对点演练3】(1)命题“ $\forall a, b > 0, a + \frac{1}{b} \geq 2$ 和 $b + \frac{1}{a} \geq 2$ 至少有一个成立”的否定为 ( )

- A.  $\forall a, b > 0, a + \frac{1}{b} < 2$  和  $b + \frac{1}{a} < 2$  至少有一个成立
- B.  $\forall a, b > 0, a + \frac{1}{b} \geq 2$  和  $b + \frac{1}{a} \geq 2$  都不成立
- C.  $\exists a, b > 0, a + \frac{1}{b} < 2$  和  $b + \frac{1}{a} < 2$  至少有一个成立
- D.  $\exists a, b > 0, a + \frac{1}{b} \geq 2$  和  $b + \frac{1}{a} \geq 2$  都不成立

(2)命题“ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + (a+1)x + 1 < 0$ ”为假命题,则实数  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$
- B.  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
- C.  $[-3, 1]$
- D.  $(-3, 1)$

(3)[2026·江苏南京期末] 若“ $\forall x \in [\frac{1}{2}, 2], x^2 - \lambda x + 2 \geq 0$ ”是真命题,则实数  $\lambda$  的最大值为 ( )

- A.  $\frac{5}{2}$       B. 3      C.  $2\sqrt{2}$       D.  $2\sqrt{3}$

[听课笔记]

## 第3讲 等式性质与不等式性质

【课标要求】 梳理等式的性质,理解不等式的概念,掌握不等式的性质.

### 课前基础巩固

#### 知识聚焦

#### 1. 两个实数比较大小的方法

$$(1) \text{作差法} \begin{cases} a-b > 0 \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b, \\ a-b = 0 \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b, \\ a-b < 0 \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b. \end{cases}$$

(2)作商法

$$\begin{cases} \frac{a}{b} > 1 (a \in \mathbf{R}, b > 0) \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b (a \in \mathbf{R}, b > 0), \\ \frac{a}{b} < 1 (a \in \mathbf{R}, b > 0) \Leftrightarrow a \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b (a \in \mathbf{R}, b > 0). \end{cases}$$

#### 2. 等式的性质

- (1)若  $a=b$ , 则  $b=a$ ;
- (2)若  $a=b, b=c$ , 则  $a=c$ ;
- (3)若  $a=b$ , 则对任意  $c$ , 都有  $\underline{\hspace{1cm}}$  或  $\underline{\hspace{1cm}}$  或  $\underline{\hspace{1cm}}$ ;
- (4)若  $a=b$ , 则对任意不为零的  $c$ , 都有  $\underline{\hspace{1cm}}$ .

#### 3. 不等式的性质

- (1)对称性:  $a > b \Leftrightarrow \underline{\hspace{1cm}}$  (双向性).

(2)传递性:  $a > b, b > c \Rightarrow a > c$  (单向性).

(3)可加性:  $a > b \Leftrightarrow a + c \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b + c$  (双向性).

(4)可乘性:  $a > b, c > 0 \Rightarrow ac \text{ } \underline{\hspace{1cm}} bc$ ;

$a > b, c < 0 \Rightarrow ac \text{ } \underline{\hspace{1cm}} bc$ .

(5) $a > b, c > d \Rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$  (单向性).

(6) $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac \text{ } \underline{\hspace{1cm}} bd$  (单向性).

(7)乘方法则:  $a > b > 0 \Rightarrow a^n \text{ } \underline{\hspace{1cm}} b^n$  ( $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ ) (单向性).

#### ◆◆ 常用结论

1. 若  $a < x < b, c < y < d$ , 则  $a-d < x-y < b-c$ .

2. 已知  $a, b, m$  都是正数, 且  $a > b$ , 则

(1)  $\frac{b-m}{a-m} < \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$  ( $b-m > 0$ ), 即真分数越加越大, 越减越小;

(2)  $\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b} < \frac{a-m}{b-m}$  ( $b-m > 0$ ), 即假分数越加越小, 越减越大.

## 课前演练

### 题组一 易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 实数  $a$  不大于  $-2$ , 用不等式表示为  $a \geq -2$ . ( )
- (2)  $x^2 > y^2$  的充要条件是  $|x| > |y|$ . ( )
- (3) 若  $a > b$ , 则  $ac^2 > bc^2$ . ( )
- (4) 不等式  $\frac{x-1}{x+2} \leq 2$  的解集是  $[-5, +\infty)$ . ( )

### 题组二 教材改编

1. 已知  $a, b, c$  都是实数, 若  $a > b$ , 则下列不等式一定成立的是 ( )
- A.  $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$  B.  $ac > bc$
- C.  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$  D.  $a - c > b - c$

2. 已知  $a, b, c, d$  为实数,  $a > b$  且  $c > d$ , 则下列不等式一定成立的是 ( )
- A.  $ac > bd$  B.  $a + c > b + d$
- C.  $ac < bd$  D.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
3. 已知  $a = \sqrt{6} + \sqrt{10}$ ,  $b = 2\sqrt{3} + 2$ , 则  $a, b$  的大小关系是 ( )
- A.  $a > b$  B.  $a = b$
- C.  $a < b$  D. 无法确定
4. 已知  $1 \leq a \leq 4$ ,  $-1 \leq b \leq 2$ , 则  $3a - b$  的取值范围是 ( )
- A.  $-13 \leq 3a - b \leq 1$
- B.  $-1 \leq 3a - b \leq 8$
- C.  $-1 \leq 3a - b \leq 13$
- D.  $1 \leq 3a - b \leq 13$

## 课堂考点探究

### 探究点一 比较数(式)的大小

例 1 (1) 已知  $a, b$  均为正实数, 若  $M = a^3 + b^3$ ,  $N = a^2b + ab^2$ , 则 ( )

- A.  $M < N$  B.  $M \leq N$
- C.  $M > N$  D.  $M \geq N$

(2) 设  $a > b > 0$ ,  $M = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ ,  $N = \frac{a - b}{a + b}$ , 比较  $M, N$  的大小.

[听课笔记]

### ◆◆ 总结反思

比较数(或式)的大小可以利用不等式或函数的性质进行判断, 也可以用作差法或作商法进行判断. 作差法要将最后的差值与 0 进行比较; 作商法首先判断两个量的正负, 然后作商, 最后将商值与 1 进行比较.

【对点演练 1】[2026 · 四川绵阳模拟] 已知  $P = a^2 + 3a + 3$ ,  $Q = a + 1$ , 则  $P$  与  $Q$  的大小关系为 ( )

- A.  $P < Q$  B.  $P = Q$
- C.  $P > Q$  D.  $P \leq Q$

[听课笔记]

### 探究点二 不等式的性质及应用

#### 题型 1 不等式的性质

例 2 (1) [2026 · 湖南益阳期末] 已知  $a > b > 0$ ,  $c > d > 0$ , 则 ( )

- A.  $a + d > b + c$  B.  $a - d > c - b$
- C.  $ac^2 > bc^2$  D.  $ad > bc$

(2)[2025·浙江温州期末] 下列命题为真命题的是 ( )

- A. 若  $a > b > 0$ , 则  $ac^2 > bc^2$   
B. 若  $a > b > 0$ , 则  $a^2 > b^2$   
C. 若  $a < b < 0$ , 则  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$   
D. 若  $a < b < 0$ , 则  $\sqrt{-a} < \sqrt{-b}$

[听课笔记]

## 题型2 不等式的应用

**例3** 从坐标平面的四个象限中取若干点, 这些点中横坐标为正数的点比横坐标为负数的点多, 纵坐标为正数的点比纵坐标为负数的点少, 则下列对这些点的判断一定正确的是 ( )

- A. 第一象限点比第二象限点多  
B. 第二象限点比第三象限点多  
C. 第一象限点比第三象限点少  
D. 第二象限点比第四象限点少

[听课笔记]

### ◆◆ 总结反思

1. 在应用不等式的性质时, 一定要搞清它们成立的前提条件, 不可强化或弱化成立的条件;
2. 要注意“箭头”是单向的还是双向的, 也就是说每条性质是否具有可逆性;

3. 在解决与不等关系有关的实际问题时, 要读懂题意, 用适当的符号将相关数(或式)联系起来, 还要注意字母的实际意义.

**【对点演练2】** (1) 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $ab < 1$ ”是“ $0 < a < \frac{1}{b}$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充要条件  
D. 既不充分也不必要条件

(2) 若  $3 \leq a \leq 5, -2 \leq b \leq 1$ , 则  $2a - b$  的取值范围是 ( )

- A.  $[8, 9]$  B.  $[4, 8]$   
C.  $[5, 8]$  D.  $[5, 12]$

(3)[2026·广东惠州一中模拟] 某校高一年级男生人数多于女生人数, 在选科后选报物理方向的人数多于选报历史方向的人数, 则 ( )

- A. 物理方向的男生多于物理方向的女生  
B. 历史方向的女生多于历史方向的男生  
C. 物理方向的女生多于历史方向的男生  
D. 物理方向的男生多于历史方向的女生

[听课笔记]

## 第4讲 基本不等式

**【课标要求】** 掌握基本不等式  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} (a, b \geq 0)$ . 结合具体实例, 能用基本不等式解决简单的最大值或最小值问题.

### 课前基础巩固

#### 知识聚焦

#### 1. 基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

- (1) 基本不等式成立的条件: \_\_\_\_\_.  
(2) 等号成立的条件: 当且仅当 \_\_\_\_\_ 时取等号.

#### 2. 几个重要的不等式

- (1)  $a^2 + b^2 \geq$  \_\_\_\_\_ ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).  
(2)  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq$  \_\_\_\_\_ ( $a, b$  同号).  
(3)  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).  
(4)  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).

### 3. 算术平均数与几何平均数

给定两个正数  $a, b$ , 数 \_\_\_\_\_ 称为  $a, b$  的算术平均数; 数  $\sqrt{ab}$  称为  $a, b$  的几何平均数. 基本不等式可叙述为: \_\_\_\_\_.

### 4. 利用基本不等式求最值问题

已知  $x > 0, y > 0$ .

(1) 如果积  $xy$  是定值  $p$ , 那么当且仅当  $x = y$  时,  $x + y$  取得最小值, 是 \_\_\_\_\_. (简记: 积定和最小)

(2) 如果和  $x + y$  是定值  $p$ , 那么当且仅当  $x = y$  时,  $xy$  取得最大值, 是 \_\_\_\_\_. (简记: 和定积最大)

#### ◆◆ 常用结论

1. 若  $x \neq 0$ , 则  $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$ , 当且仅当  $x = \pm 1$  时, 等号成立.

2. 若  $ab \neq 0$ , 则  $\left|\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right| \geq 2$ , 当且仅当  $a = \pm b$  时, 等号成立.

3. 若  $ab > 0, x \neq 0$ , 则  $\left|ax + \frac{b}{x}\right| \geq 2\sqrt{ab}$ , 当且仅当  $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$  时, 等号成立.

### 课前演练

#### 题组一 易错辨析

判断下列说法是否正确. (请在括号中打“√”或“×”)

(1) 对任意  $a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \geq 2ab$  恒成立. ( )

(2) 若  $a > 0, b > 0$ , 则  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ . ( )

(3) 当  $a, b$  同号时,  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ . ( )

#### 题组二 教材改编

1. 已知  $x > 0$ , 则  $y = x + \frac{4}{x}$  的最小值为 ( )

- A. 2                      B. 4  
C. -2                    D. -4

2. 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $x + y = 2$ , 则 ( )

- A.  $xy$  的最大值为 1  
B.  $xy$  的最小值为 1  
C.  $xy$  的最大值为  $\sqrt{2}$   
D.  $xy$  的最小值为  $\sqrt{2}$

3. 已知  $4a^2 + b^2 = 6$ , 则  $ab$  的最大值为 ( )

- A.  $\frac{3}{4}$                       B.  $\frac{3}{2}$   
C.  $\frac{5}{2}$                       D. 3

### 课堂考点探究

#### 探究点一 利用基本不等式求最值

##### 题型1 配凑法求最值

例1 (1) 已知  $x > 0$ , 则  $\frac{4}{1+x} + x$  的最小值是 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

(2) [2026 · 湖南岳阳期末] 已知  $x > 1, y > 2$  且  $xy - 2x - y = 0$ , 则  $x + y$  的最小值为 ( )

- A.  $4\sqrt{2}$                       B.  $2\sqrt{2} + 3$   
C. 4                          D. 6

[听课笔记]

##### 题型2 常数代换法

例2 (1) 已知两个正实数  $a, b$  满足  $a + \frac{2}{b} = 1$ ,

则  $\frac{2}{a} + b$  的最小值为 ( )

- A. 8                      B. 6                      C. 4                      D. 2

(2) [2026 · 河北沧州联考] 已知  $x > 0, y > 0$ ,

且  $x + y = 1$ , 则  $\frac{x^2 + y^2 + 2x - y + 1}{xy}$  的最小值为 ( )

- A.  $3 + 2\sqrt{3}$                       B. 7  
C.  $3 + 2\sqrt{5}$                       D. 8

[听课笔记]

### 题型3 消元法

**例3** 若  $x, y \in [0, +\infty)$ , 且  $2x - y = 4 - xy$ , 则

$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{y+2}$  的最小值是 ( )

- A.  $2\sqrt{2}$                       B. 2  
C.  $\sqrt{2}$                          D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[听课笔记]

#### ◆◆ 总结反思

1. 配凑法就是将相关代数式进行适当的变形, 通过添项、拆项等方法凑成和为定值或积为定值的形式, 然后利用基本不等式求解最值的方法. 配凑法的实质是代数式的灵活变形, 配系数、凑常数是关键.

2. 常数代换法主要解决形如“已知  $mx + ny = t$  ( $t$  为不等于 0 的常数), 求  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$  的最值”或“已知  $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} = t$  ( $t$  为不等于 0 的常数), 求  $ax + by$  的最值”的问题, 通常将  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$  转化为  $(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}) \cdot \frac{mx + ny}{t}$  或将  $ax + by$  转化为  $(\frac{m}{x} + \frac{n}{y}) \cdot \frac{ax + by}{t}$ , 再利用基本不等式求最值.

3. 通过消元法利用基本不等式求最值的策略: 当所求最值的代数式中的变量比较多时, 通常考虑利用已知条件消去部分变量后, 凑出“和为常数”或“积为常数”, 最后利用基本不等式求最值.

**【对点演练1】** (1) [2026·重庆江北区期末]

若正实数  $x, y$  满足  $xy + x - 3y = -1$ , 则  $x - y$  的最大值为 ( )

- A. 3                      B. 2                      C. 1                      D. 0

(2) 已知正实数  $m, n$  满足  $2m + n = 2mn$ , 则  $m + n$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$                       B.  $\frac{3}{2} + 2\sqrt{2}$   
C.  $2 + \sqrt{2}$                          D.  $2 + 2\sqrt{2}$

(3) [2026·山东青岛期末] 已知  $a > b > 1$ , 若  $\log_a b + \log_b a = \frac{5}{2}$ , 则  $\frac{a+4}{b}$  的最小值为 ( )

- A. 1                                 B. 2  
C. 3                                 D. 4

[听课笔记]

### 探究点二 基本不等式的常见变形

**例4** 已知  $0 < a < 1, b > 1$ , 则下列不等式一定成立的是 ( )

- A.  $a + b < \frac{4ab}{a+b}$                       B.  $\sqrt{ab} < \frac{2ab}{a+b}$   
C.  $\sqrt{2a^2 + 2b^2} < 2\sqrt{ab}$                       D.  $a + b < \sqrt{2a^2 + 2b^2}$

[听课笔记]

#### ◆◆ 总结反思

基本不等式的常见变形

$$(1) ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

$$(2) \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (a > 0, b > 0).$$

**【对点演练2】** (多选题) 已知  $a > 0, b > 0$ , 则下列不等式一定成立的是 ( )

- A.  $a + b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$                       B.  $\frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{ab}$   
C.  $\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \geq a + b$                       D.  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

[听课笔记]

### 探究点三 基本不等式的实际应用

**例5** 森林中某些昆虫会通过向后跳跃的方式来躲避偷袭的天敌. 某生物小组研究表明某类昆虫在水平速度为  $v$  (单位: 米/秒) 时的跳跃高度  $H$  (单位: 米) 近似满足  $v^2 = \frac{4H}{1-Hv^2}$  的等量关系, 则该类昆虫的最大跳跃高度约为 ( )

- A. 0.2 米                                 B. 0.25 米  
C. 0.45 米                                 D. 0.7 米

[听课笔记]

### ◆◆ 总结反思

利用基本不等式解决实际问题的策略:

- (1) 根据实际问题抽象出函数的解析式,再利用基本不等式求得函数的最值;
- (2) 解应用题时,一定要注意变量的实际意义及其取值范围;
- (3) 在应用基本不等式求函数最值时,若等号取不到,可利用函数的单调性求解.

【对点演练 3】 [2025·安徽铜陵期末] 现有一家物流公司计划租地建造仓库储存货物,经过市场调查了解到下列信息:仓库每月土地占地费  $y_1$  万元与仓库到车站的距离  $x$  千米的函数关系近似为  $y_1 = \frac{10}{x+1}$ ;每月库存货物费  $y_2$

万元与  $x$  的函数关系近似为  $y_2 = \frac{2}{5}x$ . 这家公司应该把仓库建在距离车站 \_\_\_\_\_ 千米处,才能使两项费用之和最少.

[听课笔记]

## 第 5 讲 一元二次方程、不等式

### 【课标要求】

1. 会结合一元二次函数的图象,判断一元二次方程实根的存在性及实根的个数,了解函数的零点与方程根的关系.
2. 经历从实际情境中抽象出一元二次不等式的过程,了解一元二次不等式的现实意义,能借助一元二次函数求解一元二次不等式,并能用集合表示一元二次不等式的解集.
3. 借助一元二次函数的图象,了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系.

### 课前基础巩固

### 知识聚焦

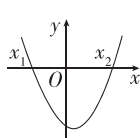
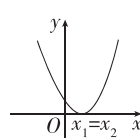
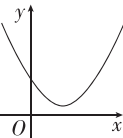
#### 1. 一元二次不等式

把只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是 2 的不等式,称为一元二次不等式,其一般形式为  $ax^2 + bx + c > 0$  或 \_\_\_\_\_ ( $a, b, c$  均为常数,  $a \neq 0$ ).

#### 2. 一元二次不等式的解法步骤

- (1) 将不等式化为右边为零,左边为二次项系数大于零的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  ( $a > 0$ ) 或  $ax^2 + bx + c < 0$  ( $a > 0$ ).
- (2) 求出相应的一元二次方程的根.
- (3) 利用二次函数的图象与  $x$  轴的交点确定一元二次不等式的解集.

#### 3. 一元二次不等式与相应的二次函数及一元二次方程的关系

| 判别式<br>$\Delta = b^2 - 4ac$                       | $\Delta > 0$                                                                          | $\Delta = 0$                                                                          | $\Delta < 0$                                                                          |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 二次函数<br>$y = ax^2 + bx + c$<br>( $a > 0$ )<br>的图象 |  |  |  |

(续表)

|                                           |                                       |                                       |              |
|-------------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------|
| 判别式<br>$\Delta = b^2 - 4ac$               | $\Delta > 0$                          | $\Delta = 0$                          | $\Delta < 0$ |
| 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ( $a > 0$ ) 的根 | 有两个不相等的实数根 $x_1, x_2$ ( $x_1 < x_2$ ) | 有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ | 没有实数根        |
| $ax^2 + bx + c > 0$ ( $a > 0$ ) 的解集       | _____                                 | _____                                 | $\mathbf{R}$ |
| $ax^2 + bx + c < 0$ ( $a > 0$ ) 的解集       | _____                                 | $\emptyset$                           | $\emptyset$  |

## 4. 一元二次方程根的分布

设函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), 且  $f(x) = 0$  的两实根分别为  $x_1, x_2$ .

|                  |                                                                                               |                       |                                                                                                                                                     |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 分布情况             | 两实根都在 $(m, n)$ 内                                                                              | 两实根有且仅有一根在 $(m, n)$ 内 | 一根在 $(m, n)$ 内, 另一根在 $(p, q)$ 内 ( $p \geq n$ )                                                                                                      |
| 大致图象 ( $a > 0$ ) |                                                                                               |                       |                                                                                                                                                     |
| 得出的结论            | $\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ f(m) > 0, \\ f(n) > 0, \\ m < -\frac{b}{2a} < n \end{cases}$ | $f(m) \cdot f(n) < 0$ | $\begin{cases} f(m) > 0, \\ f(n) < 0, \\ \text{或} \\ f(p) < 0, \\ f(q) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(m)f(n) < 0, \\ f(p)f(q) < 0 \end{cases}$ |
| 大致图象 ( $a < 0$ ) |                                                                                               |                       |                                                                                                                                                     |
| 得出的结论            | $\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ f(m) < 0, \\ f(n) < 0, \\ m < -\frac{b}{2a} < n \end{cases}$ | $f(m) \cdot f(n) < 0$ | $\begin{cases} f(m) < 0, \\ f(n) > 0, \\ \text{或} \\ f(p) > 0, \\ f(q) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(m)f(n) < 0, \\ f(p)f(q) < 0 \end{cases}$ |

## ◆◆ 常用结论

## 1. 一元二次不等式恒成立问题

(1) 不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  ( $a \neq 0$ ),  $x \in \mathbf{R}$  恒成立  $\Leftrightarrow a > 0$  且  $\Delta < 0$ ;

(2) 不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  ( $a \neq 0$ ),  $x \in \mathbf{R}$  恒成立  $\Leftrightarrow a < 0$  且  $\Delta < 0$ .

## 2. 简单分式不等式

(1)  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0, \\ g(x) \neq 0; \end{cases}$

(2)  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0$ .

3. 能成立问题的转化:  $a > f(x)$  能成立  $\Rightarrow a > f(x)_{\min}$ ;

$a \leq f(x)$  能成立  $\Rightarrow a \leq f(x)_{\max}$ .

## 课前演练

## 题组一 易错辨析

判断下列说法是否正确.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 关于  $x$  的一元二次方程  $mx^2 - 5x = 0$  的两实根分别是  $0, \frac{5}{m}$ . ( )

(2) 若关于  $x$  的方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a < 0$ ) 没有实数根, 则关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ . ( )

(3) 如果二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象开口向上, 那么不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集一定不是空集. ( )

(4) 关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集可能是  $(m, +\infty)$  ( $m$  为常数). ( )

## 题组二 教材改编

1. 不等式  $-x^2 - x + 6 > 0$  的解集为 ( )

- A.  $\{x | -2 < x < 3\}$   
 B.  $\{x | -3 < x < 2\}$   
 C.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$   
 D.  $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$

2. 已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集是  $(1, 2)$ , 则关于  $x$  的不等式  $cx^2 + bx + a > 0$  的解集是 \_\_\_\_\_ (用集合表示).

3. 若不等式  $ax^2 - ax + a + 1 > 0$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.



### 探究点一 一元二次不等式的解法

#### 题型1 不含参数的不等式

**例1** (1)[2026·湖南邵阳期末] 已知集合  $A = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0\}$ ,  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ , 则  $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B =$  ( )

- A.  $\{-3, -2, -1\}$       B.  $\{-3, -2\}$   
C.  $\{1, 2, 3\}$       D.  $\{2, 3\}$

(2) 不等式  $\frac{2x-1}{1-x} \geq 1$  的解集是 ( )

- A.  $\{x | \frac{1}{2} \leq x < 1\}$       B.  $\{x | x \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\}$   
C.  $\{x | \frac{2}{3} \leq x < 1\}$       D.  $\{x | x \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } x > 1\}$

[听课笔记]

#### 题型2 含参数的不等式

**例2** (1)[2025·广东汕头质检] 对于给定实数  $a$ , 关于  $x$  的一元二次不等式  $(ax-1)(x+1) < 0$  的解集可能是 ( )

- A.  $\{x | -1 < x < \frac{1}{a}\}$       B.  $\{x | x \neq 1\}$   
C.  $\{x | \frac{1}{a} < x < -1\}$       D.  $\mathbb{R}$

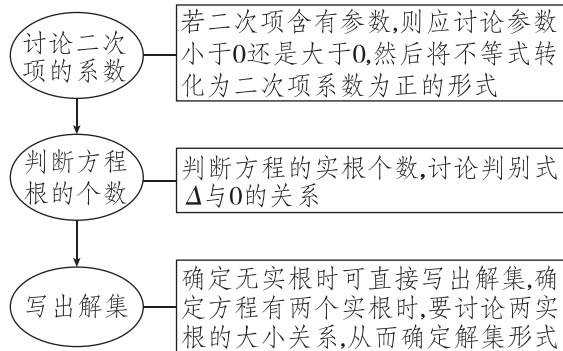
(2) 当  $0 < a < 1$  时, 关于  $x$  的不等式  $(x-3)[(a-1)x + (3-a)] > 0$  的解集为 ( )

- A.  $\{x | x > 3 \text{ 或 } x < \frac{a-3}{a-1}\}$   
B.  $\{x | 3 < x < \frac{a-3}{a-1}\}$   
C.  $\{x | x < 3 \text{ 或 } x > \frac{a-3}{a-1}\}$   
D.  $\{x | \frac{a-3}{a-1} < x < 3\}$

[听课笔记]

### ◆◆ 总结反思

(1) 解含参数的一元二次不等式的一般步骤



(2) 在处理分式不等式过程中,如果不能确定分母正负,则可先进行移项,将分式不等式转化为整式不等式,可避免去分母过程中产生的分类讨论.

**【对点演练1】** (1) 不等式  $(\frac{1}{2}-x)(x-\frac{1}{3}) > 0$

的解集为 ( )

- A.  $\{x | \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\}$       B.  $\{x | x > \frac{1}{2}\}$   
C.  $\{x | x < \frac{1}{3}\}$       D.  $\{x | x < \frac{1}{3} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$

(2)[2026·陕西安康期末] 不等式  $\frac{2x-5}{x+2} \leq 1$

的解集是 ( )

- A.  $\{x | -2 \leq x \leq 7\}$       B.  $\{x | x \leq 7\}$   
C.  $\{x | -2 < x \leq 7\}$       D.  $\{x | x > -2\}$

(3)(多选题) 已知关于  $x$  的不等式  $x^2 - (3a+3)x + 2a^2 + 3a \leq 0$  的解集为  $A$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $A$  可能为空集  
B.  $A$  中可能只有一个元素  
C. 若  $a < -3$ , 则  $A$  中的元素为负数  
D. 若  $4 \in A$ , 则  $\frac{1}{2} \leq a \leq 4$

[听课笔记]

## 探究点二 三个二次间的关系

**例 3** (1)若关于  $x$  的不等式  $ax^2 - bx + c > 0$  的解集为  $\{x | -1 < x < 2\}$ , 则  $bx^2 - ax + c < 0$  的解集为 ( )

- A.  $(-1, 2)$   
B.  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$   
C.  $(-2, 1)$   
D.  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

(2)[2026·江苏南京期中] 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$  的一根在  $(1, 2)$  内, 另一根在  $(3, 4)$  内, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

[听课笔记]

### ◆◆ 总结反思

一元二次不等式的解集与相应一元二次方程的根或函数的零点之间是相通的, 这是构成三个二次之间关系的桥梁.

在求解根的分布问题时, 要结合根与系数的关系或方程所对应的函数的函数值大小, 转化为代数问题进行求解.

**【对点演练 2】** (1)已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + (a^2 + 1)x + a - 2 = 0$  的一根比 1 大, 另一根比 1 小, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $\{a | -3 < a < 1\}$  B.  $\{a | -2 < a < 0\}$   
C.  $\{a | -1 < a < 0\}$  D.  $\{a | 0 < a < 2\}$

(2)(多选题)[2026·山东菏泽期中] 已知  $m$  为任意实数, 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ , 则 ( )

- A. 当  $m \leq 2$  时, 方程有两个实数根  
B. 当  $m < 1$  时, 方程有两个异号的实数根  
C. 当  $m = 4$  时, 方程有两个实数根  $x_1, x_2$ , 则  $x_1 x_2 = 3$

D. 若方程有两个实数根  $x_1, x_2$ , 则  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} =$

$\frac{2}{m-1}$

[听课笔记]

## 探究点三 一元二次不等式恒(能)成立

### 问题

#### 题型 1 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立问题

**例 4** (1)[2026·江西临川联考] 当  $x \in \mathbf{R}$  时, 一元二次不等式  $kx^2 - kx + 1 > 0$  恒成立, 则  $k$  的取值范围是 ( )

- A.  $0 < k < 4$  B.  $k < 4$   
C.  $0 \leq k < 4$  D.  $k < 0$  或  $k > 4$

(2)[2026·辽宁辽阳期末] 函数  $f(x) = \log_2(ax^2 - ax + 2)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0, 8)$  B.  $(-\infty, 0] \cup (8, +\infty)$   
C.  $[0, 8)$  D.  $(8, +\infty)$

[听课笔记]

#### 题型 2 在给定区间上的恒成立问题

**例 5** (1)[2025·福建三明期末] 已知  $f(x) = \log_3 \frac{x}{9} \cdot \log_3 \frac{x}{3}$ , 当  $x \in [\frac{1}{3}, 3\sqrt{3}]$  时,  $f(x) \geq m \log_3 x$  恒成立, 则  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-6, -\frac{1}{6}]$   
B.  $[-6, -3 + 2\sqrt{2}]$   
C.  $[-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}]$   
D.  $(-\infty, -3 + 2\sqrt{2}]$

(2)已知函数  $f(x) = x^2 + ax + b (a, b \in \mathbf{R})$ , 且  $f(x) < 0$  的解集为  $(1, 3)$ . 求函数  $f(x)$  在区间  $[t, t+2] (t \in \mathbf{R})$  上的最小值  $g(t)$ .

[听课笔记]

### 题型3 给定参数范围的恒成立问题

**例6** [2026·湖北武汉武钢三中检测] 已知对任意  $m \in [1, 3]$ ,  $mx^2 - mx - 1 < -m + 5$  恒成立, 则实数  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $(\frac{6}{7}, +\infty)$   
B.  $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$   
C.  $(-\infty, \frac{6}{7})$   
D.  $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

[听课笔记]

### 题型4 不等式能成立(存在)问题

**例7** 若存在  $x \in \mathbf{R}$ ,  $mx^2 + 2(m-3)x + 4 \leq 0$ , 则实数  $m$  的取值范围为 ( )

- A.  $(1, 9)$   
B.  $(-\infty, 0)$   
C.  $(-\infty, 1) \cup (9, +\infty)$   
D.  $(-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$

[听课笔记]

### ◆◆ 总结反思

1. 一元二次不等式在  $\mathbf{R}$  上恒成立的情况:

$$ax^2 + bx + c > 0 (a \neq 0) \text{ 恒成立} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0 (a \neq 0) \text{ 恒成立} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

2. (1)一元二次不等式在给定区间上的恒成立问题, 其本质是将不等式恒成立转化为最大(小)值问题, 即若

$f(x)$  的图象连续不断, 则  $f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$  恒成立等价于  $f(x)_{\min} \geq 0 (x \in [a, b])$ ,  $f(x) \leq 0 (x \in [a, b])$  恒成立等价于  $f(x)_{\max} \leq 0 (x \in [a, b])$ .

(2)用分离参数法可避免分类讨论, 直接求出参数的取值范围.

**【对点演练3】** (1)[2026·重庆期末] 若不等式  $(a-2)x^2 - 2(a-2)x - 4 < 0$  对一切  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$   
B.  $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$   
C.  $(-2, 2)$   
D.  $(-2, 2]$

(2)对任意  $x \in [-1, 1]$ , 不等式  $x^2 - x + \frac{1}{2} \geq m$  恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $m \geq \frac{1}{2}$                       B.  $m \leq \frac{1}{4}$   
C.  $m \leq \frac{1}{2}$                       D.  $m \leq \frac{5}{2}$

(3)“ $m < 2$ ”是“ $x^2 - mx + 1 \geq 0$  在  $[2, +\infty)$  上恒成立”的 ( )

- A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充要条件  
D. 既不充分也不必要条件

(4)[2026·河北廊坊期末] 函数  $f(x) = -x^2 + ax$ , 则  $f(x) \geq 1$  在  $(0, 1]$  上有解的一个充分不必要条件是 ( )

- A.  $a \geq 2$                       B.  $a \geq 3$   
C.  $a \leq -1$                       D.  $a \leq -2$

[听课笔记]